Mathe 10 | Blatt 40 Aufgaben zum exponentiellen Wachstum

Aufgabe 1: Ein Autohändler benutzt folgende Formel, um den Verkaufswert w (in Euro) eines Autos bei einer durchschnittlichen jährlichen Fahrleistung von 30000 km zu bestimmen:

$$w(t)=30000\cdot 0{,}78^t$$ | t ist das Alter des Fahrzeugs in Jahren

a) Gib die Bedeutung der im Term enthaltenen Zahlen an.
b) Berechne, nach welcher Zeit der Verkaufswert noch 3206 € beträgt.
c) Herr Boroski möchte bei diesem Händler einen zwei Jahre alten Wagen kaufen. Er möchte jedoch auch 40% unter dem Neupreis bleiben. Entscheide, ob sich Herr Boroski und der Autohändler einig werden.

Aufgabe 2: In einem Experiment soll die Schwächung von Gammastrahlung beim Durchgang durch Blei untersucht werden. Z ist die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde eine Bleischicht der Dicke x (in mm) durchdringen.

x	0,0	3,0	9,0
Z	198	154	93

a) Nehme an, dass zwischen x und Z ein linearer Zusammenhang besteht. Berechne, ausgehend von den Werten für x = 0,0 und x = 3,0 ,

- wie viele Photonen pro Sekunde man bei Verwendung einer 9,0 mm dicken Bleischicht messen wird.
- wie dick die Bleischicht mindestens sein müsste, um die Gammastrahlung vollständig abzuschirmen.

b) Zeige, dass die Werte zu einer exponentiellen Abnahme von Z um 8% pro Millimeter Blei passen.
c) Stelle einen Term Z(x) auf, der die Anzahl der pro Sekunde gemessenen Photonen in Abhängigkeit der Schichtdicke x angibt.

Aufgabe 3: Auf einem See mit kreisförmiger Wasserfläche tritt ein starkes Algenwachstum auf. Ein Biologe erstellt folgende Tabelle:

Beobachtungstag	0	1	11
Mit Algen bedeckte Fläche	$120\,m^2$	$126\,m^2$	$205\,m^2$

a) Zeige, dass die Werte zu einem exponentiellen Wachstum passen und gebe den Wachstumsfaktor an.
b) Der See hat einen Durchmesser von ca. 30 m. Bestimme, nach wie vielen Tagen, die Hälfte der Wasseroberfläche mit Algen bedeckt sein wird.

Aufgabe 4: In einem Behälter mit radioaktivem Abfall befinden sich $80\,\mu g$ radioaktives Cs-137. Durch einen Betazerfall geht Cs-137 in Ba-137 über, so dass sich nach 60 Jahren nur noch $20\,\mu g$ Cäsium im Behälter befinden. Die Masse des zum Zeitpunkt t (in Jahren) vorhandenen Cäsiums lässt sich durch folgenden Term berechnen:

$$m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k\cdot t}$$ | mit $k\in\mathbb{R}^+$

a) Die Halbwertszeit gibt die Zeit an, in der sich die Masse des radioaktiven Materials jeweils halbiert. Gib die Halbwertszeit für Cs-137 an.
b) Berechne den Wert der konstanten k.
c) Nach wie vielen Jahren befindet sich nur noch 10 % der ursprünglichen Masse des Cs-137 im Behälter?

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1: a) Der Neupreis des Autos beträgt 30 000 €. 0,78 ist der Wachstumsfaktor, d.h. das Auto verliert jedes 22 % seines Verkaufswertes.

b) $3206=30000\cdot 0{,}78^t \;\Rightarrow\; \frac{3206}{30000}=0{,}78^t \;\Rightarrow\; \log_{0{,}78}(\frac{3206}{30000})=t \;\Rightarrow t \;\approx 9{,}00$

c) $100\,\%-40\,\%=60\,\%$; Der Verkaufswert sollte also bei 60 % des Neupreises liegen.

$0{,}78^4=0{,}6084$; also ca. 60 %

Der Autohändler und Herr Boroski haben ähnliche Preisvorstellungen und sollten sich einig werden.

Aufgabe 2:

a) $198-154=44$; $154-2\cdot 44=66$

Bei linearem Zusammenhang würde man 66 Photonen pro Sekunde messen, wenn eine 9,0 mm dicke Bleischicht verwendet wird.

$198-\frac{44}{3}x=0 \;\Rightarrow x=\frac{198\cdot 3}{44}=\frac{27}{2}=13{,}5$

Die Bleischicht müsste 13,5 mm dick sein.

b) $100\,\%-8\,\%=92\,\%$; $198\cdot 0{,}92^0=198$; $198\cdot 0{,}92^3\approx 154$; $198\cdot 0{,}92^9\approx 93$

c) $Z(x)=198\cdot 0{,}92^x$

Aufgabe 3: a) Wachstumsfaktor: $\frac{126}{120}=1{,}05$; $120\cdot 1{,}05^{11}\approx 205$

b) $A_{\text{See}}=\pi r^2=\pi 15^2\approx 706{,}86$ (in Quadratmeter). $\frac{706{,}86}{2}=353{,}43$;

$353{,}43=120\cdot 1{,}05^t \;\Rightarrow\; \frac{353{,}43}{120}=1{,}05^t \;\Rightarrow\; t=\log_{1{,}05}(\frac{353{,}43}{120})\approx 22{,}1$ (Tage)

Aufgabe 4:

a) $\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$ Da nach 60 Jahren nur noch ein Viertel der ursprünglichen Masse vorhanden ist, muss nach 30 Jahren die Hälfte der ursprünglichen Masse vorhanden sein. Die Halbwertszeit beträgt also 30 Jahre.

b) $k\cdot 30=1 \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{30}$.

Oder: $20=80\cdot(\frac{1}{2})^{k\cdot 30} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^{30k} \;\Rightarrow\; 30k=\log_{0{,}5}(\frac{1}{4})=2 \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{30}$

c) $0{,}10=0{,}5^{0{,}033t} \;\Rightarrow\; 0{,}033t=\log_{0{,}5}(0{,}1) \;\Rightarrow\; t=\frac{\log_{0{,}5}(0{,}1)}{0{,}033}\approx 100{,}7$

Nach ca. 100 Jahren ist noch 10 % des radioaktiven Cäsiums vorhanden.