Mathe 10 | Blatt 38 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die folgende Aufgabe hat Gerd Gigerenzer in einer Studie über diagnostische Intuition verschiedenen Ärzten gestellt[1]:

Um die Früherkennung von Brustkrebs ab einem bestimmten Alter zu fördern, wird Frauen empfohlen, regelmäßig an Screenings (Reihentests für Frauen ohne Symptome) teilzunehmen. Angenommen, Sie führen in einer bestimmten Gegend des Landes ein solches Brustkrebs-Screening mit Hilfe von Mammographie durch. In der betreffenden Gegend liegen folgende Angaben über Frauen zwischen 40 und 50 vor, bei denen sich keine Symptome zeigen und die am Mammographie-Screening teilnehmen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 0,8 Prozent. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 90 Prozent, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt. Wenn eine Frau jedoch keinen Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 7 Prozent, dass ihr Mammogramm dennoch positiv ausfällt. Angenommen, bei einer Frau ist das Mammogramm positiv. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat?

Von jeweils 1000 Frauen habeen 8 Brustkrebs. Von diesen 8 Frauen mit Brustkrebs werden 7 ein positives Mammogramm haben. Von den übrigen 992 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, werden rund 70 dennoch ein positives Mammogramm haben. Stellen Sie sich nun eine Anzahl von Frauen vor, deren Mammogramm beim Screening positiv ausfiel. Wie viele von ihnen haben wirklich Brustkrebs?

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Aufgabe 1:
In einem Einkaufszentrum werden 200 Passanten befragt. 60 können Schafkopf spielen, aber kein Rommé. 160 können wenigstens eines der beiden Spiele. 2 von 5 können Rommé aber kein Schafkopf.

a) Erstelle eine vollständige Vierfeldertafel mit den absoluten Häufigkeiten.

b) Einer dieser Passanten wird zufällig ausgewählt. Berechne mit welcher Wahrscheinlichkeit er Schafkopf spielen kann, wenn er nicht Rommé spielen kann.

Aufgabe 2:
In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Trifft man in diesem Betrieb eine weibliche Betriebsangehörige, dann ist sie mit 15% Wahrscheinlichkeit eine Raucherin.

a) Berechne den Anteil der weiblichen Raucher unter den Betriebsangehörigen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger

(A) weiblich, falls dieser Betriebsangehöriger raucht?
(B) männlich, falls dieser Betriebsangehörige raucht?
(C) Raucher, falls dieser Betriebsangehörige männlich ist?

1 Entnommen aus: Das Einmaleins der Skepsis – Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken; Gerd Gigerenzer; 6. Auflage; ISBN 978-3-8333-0041-7; S. 65

Aufgabe 1:

a) Vierfeldertafel:

160 -60-80=20

	A	$\overline{A}$	
B	30		
$\overline{B}$			120
	70		200

b) $P(S|\overline{R})=\frac{60}{100}$

Aufgabe 2:

a) $P(\overline{M})=1-P(M)=1-0{,}6=0{,}4$

$P(R|\overline{M})=\frac{P(\overline{M}\cap R)}{P(\overline{M})}$

$\Rightarrow P(\overline{M}\cap R)=P(R|\overline{M})\cdot P(\overline{M})=0{,}15\cdot 0{,}4=0{,}06$

b) Vierfeldertafel

	M	$\overline{M}$	
R	0,04	0,06	0,1
$\overline{R}$	0,56	0,34	0,9
	0,6	0,4	1

(A) $P(\overline{M}|R)=\frac{P(\overline{M}\cap R)}{P(R)}=0{,}6$

(B) $P(M|R)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=0{,}4$

(C) $P(R|M)=\frac{P(M\cap R)}{P(M)}=\frac{1}{15}\approx 0{,}067$