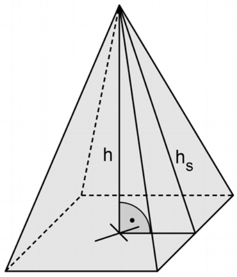
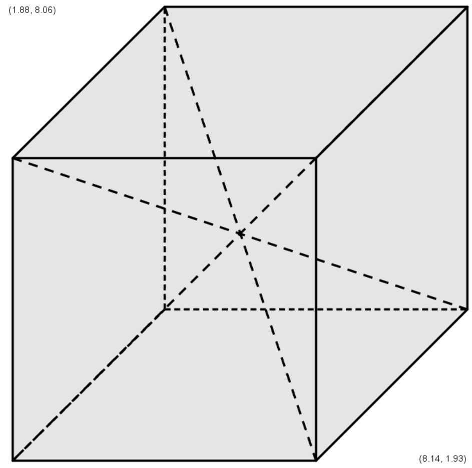
Mathe 10 – Blatt 15 | Pyramiden Datum: _______________

Ist G die Grundfläche und h die Höhe einer Pyramide, so gilt:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$O = M + G$$





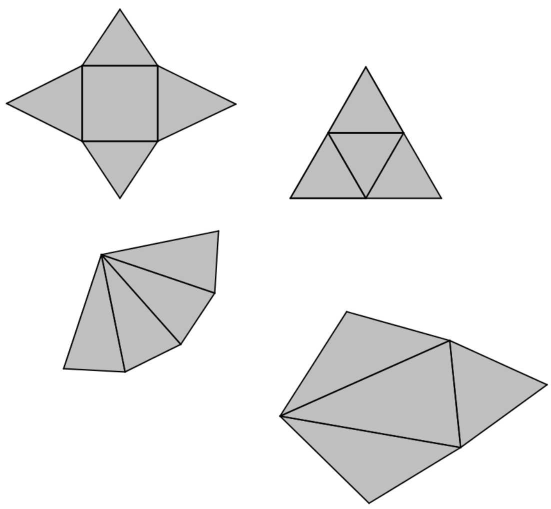
Aufgabe 1: Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a wird mit allen Würfelecken verbunden.
a) Wie viele Pyramiden mit der Spitze M entstehen dadurch?
b) Gib das Volumen einer Pyramide als Bruchteil des Würfelvolumens an.
b) Schreibe das Volumen der Pyramide in der Form $V_{\text{Pyramide}} = k \cdot G \cdot h$ und bestimme k.

Aufgabe 2: Berechne das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h:
a) $G=10cm^2$ und $h=6cm$ b) $G=30cm^2$ und $h=5cm$ c) $G=12cm^2$ und $h=8cm$ d) $G=15cm^2$ und $h=7cm$

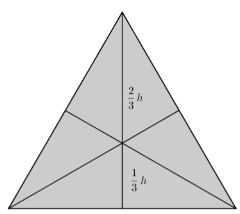
Aufgabe 3: Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundkantenlänge 3cm und die Höhe 4cm .
a) Zeichne Schrägbild und Netz der Pyramide.
b) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt der Pyramide.

Aufgabe 4: Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundkantenlänge 4cm und Seitenkantenlänge 5cm.
a) Zeichne Schrägbild und Netz der Pyramide.
b) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt der Pyramide.

Aufgabe 5: Entscheide, welche der folgenden Figuren Pyramidennetze ergeben.



Aufgabe 6: Bestimme Volumen und Oberflächeninhalt eines regelmäßigen Tetraeders der Kantenlänge a.
Ein regelmäßiger Tetraeder ist eine Pyramide mit gleichseitigen Dreiecken als Grund- und Seitenflächen.



Lösung

Aufgabe 1: Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a wird mit allen Würfelecken verbunden.

a) 6 b) $\frac{1}{6}a^3$ b) $V_{\text{Pyramide}} = k \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{3} G h$

Aufgabe 2: Berechne das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h:

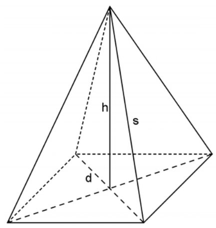
a) $V = \frac{1}{3} \cdot 10\,\text{cm}^2 \cdot 6\,\text{cm} = 20\,\text{cm}^3$; b) $V = 50\,\text{cm}^3$; c) $V = 32\,\text{cm}^3$; $V = 35\,\text{cm}^3$

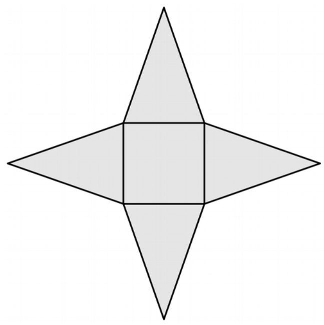
Aufgabe 3: Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundkantenlänge 3cm und die Höhe 4cm .

a) Für das Netz muss die Seitenkante s mit Hilfe des Pythagoras berechnet werden:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\, a$;

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2}\,\text{cm} \approx 4{,}53\,\text{cm}$$





b) $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} (3\,\text{cm})^2 \cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^3$

Für die Mantelfläche benötigt man die Höhe der Seitenfläche:

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}\,\text{cm} \approx 4{,}27\,\text{cm}$$

$$O = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s + a^2 = (9 + 3\sqrt{73})\,\text{cm}^2 \approx 34{,}63\,\text{cm}^2$$

Aufgabe 4: Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundkantenlänge 4cm und Seitenkantenlänge 5cm.

a) $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\, a$; $s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{s^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}\,\text{cm} \approx 4{,}12\,\text{cm}$

vergleiche die Zeichnung mit der Korrekturfolie

b) $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} (4\,\text{cm})^2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}\,\text{cm} = \frac{8\sqrt{17}}{3}\,\text{cm}^3 \approx 10{,}99\,\text{cm}^3$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_s^2 = s^2 \Rightarrow h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{21}\,\text{cm} \approx 4{,}58\,\text{cm}$; $O = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s + a^2 = (16 + 8\sqrt{21})\,\text{cm} \approx 52{,}66\,\text{cm}^2$

Aufgabe 5: Die beiden rechten Figuren sind Netze von Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche.

Aufgabe 6: Bestimme Volumen und Oberflächeninhalt eines Tetraeders der Kantenlänge a.

$$h_{\text{Dreieck}}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h_{\text{Dreieck}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$a^2 = \left(\frac{2}{3} h_{\text{Dreieck}}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \quad ; \quad O = 4 \cdot A_{\text{gleichseitiges Dreieck}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3}\, a^2$$